Учебная практика по дисциплине «Математика для экономистов»

Расчетная работа №1: Решение задач векторной алгебры.

Цель: Применение изученных теоретических положений раздела «Векторная алгебра» при решении задач с векторами, решении геометрических задач и в математическом моделировании экономических задач.

Основные теоретические положения:

Определение линейного (векторного) пространства	Множество R элементов произвольной природы, называемых векторами и обозначаемых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ называется **линейным или векторным пространством**, если 1) $(\forall \overline{x} \in R, \forall \overline{y} \in R) : \exists (\overline{x} + \overline{y}) \in R$, называемый суммой векторов, 2) $(\forall \overline{x}, \forall \alpha) : \exists \alpha \overline{x} \in R$, называемый произведением вектора $\overline{x}$ на число α. При этом операции (1, 2) сложения векторов и умножения вектора на число должны удовлетворять следующим **аксиомам**: а) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ $(\forall \overline{x} \in R, \forall \overline{y} \in R)$; б) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ $(\forall \overline{x} \in R, \forall \overline{y} \in R, \forall \overline{z} \in R)$; в) $\exists \overline{0} : \overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ $(\forall \overline{x} \in R, \overline{0} \in R)$; г) $\exists y : \overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$ $(\forall \overline{x} \in R, \overline{y} \in R, \overline{0} \in R)$, вектор $\overline{y}$ называется противоположным вектору $\overline{x}$;
Определение линейной зависимости (независимости) системы	Система строк (столбцов, векторов, решений) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **линейно зависимой**, если их линейная комбинация равна нулю : $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, когда **не все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ — нули, и называется **линейно независимой**, если их линейная комбинация равна нулю: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, когда **все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ — нули.
Определение размерности линейного пространства	Линейное пространство R_n называется n **-мерным,** если в нём существует система n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ вектора, линейно зависима.
Определение базиса	Любая совокупность из n линейно независимых векторов n -мерного линейного пространства называется **базисом** этого пространства.
Определение координат вектора	Коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой вектор $\overline{x}$ линейного пространства выражается через базисные векторы этого пространства, называются **координатами вектора** $\overline{x}$ относительно этого базиса.
Определение ортонормированного (декартова) базиса	**Ортонормированным (декартовым) базисом** называется базис из попарно **ортогональных** (попарно перпендикулярных) векторов, **длина** каждого их которых равна **единице**. Базисные векторы декартова базиса называют **ортами** и **в трёхмерном пространстве обозначают** $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Координаты вектора $\overline{AB}$ находят, вычитая из координат точки $B(b_x, b_y, b_z)$, являющейся концом вектора, соответствующие координаты точки $A(a_x, a_y, a_z)$, являющейся началом вектора.

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}.$$

Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению длин этих векторов: $\cos\left(\overline{AB}, \widehat{\ }\overline{CD}\right) = \dfrac{\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{CD}\right|}$.

Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном (декартовом) базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов: если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $(a, b) = (b, a) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Длина вектора $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$ в ортонормированном базисе равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора. Например, если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. $\quad пр_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{(\overline{a}, \overline{b})}{\left|\overline{b}\right|}$ – **проекция вектора** $\overline{a}$ **на вектор** $\overline{b}$.

В ортонормированном базисе векторное произведение находят, раскладывая определитель, в первой строке которого – орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат, во второй строке – координаты левого из перемножаемых векторов, а в третьей строке – координаты правого из перемножаемых векторов.

Например, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда векторное произведение этих векторов в декартовой системе координат можно найти так:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения

$[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$; $\mathrm{mod}[\overline{a}, \overline{b}] = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\overline{a}\,\widehat{\ }\,\overline{b})$;

тройка $\overline{a}, \overline{b}, [\overline{a}, \overline{b}]$ *– правая.*

Геометрический смысл векторного произведения.	**Модуль** векторного произведения численно равен **площади параллелограмма,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Половина модуля** векторного произведения численно равна **площади треугольника,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах этого треугольника. Обычно векторы приводят к общему началу.
Определение и условие компланарности векторов.	Векторы, лежащие **в одной или параллельных плоскостях,** называются компланарными. **Смешанное** произведение ненулевых **компланарных** векторов равно **нулю.**

Смешанное произведение трех векторов получают, умножая векторное произведение двух векторов на третий вектор скалярно.

В ортонормированном базисе смешанное произведение равно определителю, строками или столбцами которого являются координаты перемножаемых векторов. Обычно первой строкой определителя записывают координаты первого вектора, второй строкой – координаты второго вектора, а третьей строкой – координаты третьего вектора, если считать векторы слева направо.

Полезно помнить такие **свойства** смешанного произведения: 1) **при перестановке** двух любых **соседних** векторов смешанное произведение **меняет знак** на противоположный; 2) **при циклической** перестановке (последний вектор ставится впереди первого) смешанное произведение **не изменяется**, поскольку при этом два раза переставляются соседние векторы.

Геометрический смысл смешанного произведения. **Деление отрезка в отношении** λ**.**	**Модуль** смешанного произведения трех векторов равен **объему параллелепипеда,** построенного на этих векторах как на ребрах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Объём пирамиды**, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой объёма параллелепипеда, построенного на этих же векторах как на ребрах $\lambda = \pm\dfrac{\left\|\overline{AK}\right\|}{\left\|\overline{KB}\right\|}$: $\quad x_K = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; y_K = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; z_K = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$.

Индивидуальное задание №1.

По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

а) длину ребра A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объем пирамиды;

$A_1(2;-1;2),\ A_2(1;-1;6),\ A_3(0;0;2),\ A_4(2;1;4).$

$A_1(2;0;3),\ A_2(1;0;7),\ A_3(0;1;3),\ A_4(2;2;5).$

$A_1(-1;0;2),\ A_2(-2;0;6),\ A_3(-3;1;2),\ A_4(-1;2;4).$

$A_1(2;3;2),\ A_2(1;3;6),\ A_3(0;4;2),\ A_4(2;5;4).$

$A_1(0;2;-1),\ A_2(-1;2;3),\ A_3(-2;3;7),\ A_4(0;4;1).$

$A_1(3;0;2),\ A_2(2;0;6),\ A_3(1;1;2),\ A_4(3;2;4).$

$A_1(0;-1;2),\ A_2(-1;-1;6),\ A_3(-2;0;2),\ A_4(0;1;4).$

$A_1(2;-1;2),\ A_2(1;-1;6),\ A_3(0;0;2),\ A_4(2;1;4).$

$A_1(2;0;3),\ A_2(1;0;7),\ A_3(0;1;3),\ A_4(2;2;5).$

$A_1(-1;0;2),\ A_2(-2;0;6),\ A_3(-3;1;2),\ A_4(-1;2;4).$

$A_1(2;3;2),\ A_2(1;3;6),\ A_3(0;4;2),\ A_4(2;5;4).$

$A_1(0;2;-1),\ A_2(-1;2;3),\ A_3(-2;3;7),\ A_4(0;4;1).$

Индивидуальное задание №2.

Найти $\text{пр}_{\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{a}$

1. $\mathbf{a}=\{2,\ 3,\ 1\},\ \mathbf{b}=\{-1,\ 0,\ -1\},\ \mathbf{c}=\{2,\ 2,\ 2\}.$
2. $\mathbf{a}=\{3,\ 2,\ 1\},\ \mathbf{b}=\{2,\ 3,\ 4\},\ \mathbf{c}=\{3,\ 1,\ -1\}.$
3. $\mathbf{a}=\{1,\ 5,\ 2\},\ \mathbf{b}=\{-1,\ 1,\ -1\},\ \mathbf{c}=\{1,\ 1,\ 1\}.$
4. $\mathbf{a}=\{1,\ -1,\ -3\},\ \mathbf{b}=\{3,\ 2,\ 1\},\ \mathbf{c}=\{2,\ 3,\ 4\}.$
5. $\mathbf{a}=\{3,\ 3,\ 1\},\ \mathbf{b}=\{1,\ -2,\ 1\},\ \mathbf{c}=\{1,\ 1,\ 1\}.$
6. $\mathbf{a}=\{3,\ 1,\ -1\},\ \mathbf{b}=\{-2,\ -1,\ 0\},\ \mathbf{c}=\{5,\ 2,\ -1\}.$
7. $\mathbf{a}=\{4,\ 3,\ 1\},\ \mathbf{b}=\{1,\ -2,\ 1\},\ \mathbf{c}=\{2,\ 2,\ 2\}.$

.8. $\mathbf{a}=\{4,\ 3,\ 1\},\ \mathbf{b}=\{6,\ 7,\ 4\},\ \mathbf{c}=\{2,\ 0,\ -1\}.$

9. $\mathbf{a}=\{3,\ 2,\ 1\},\ \mathbf{b}=\{1,\ -3,\ -7\},\ \mathbf{c}=\{1,\ 2,\ 3\}.$
10. $\mathbf{a}=\{3,\ 7,\ 2\},\ \mathbf{b}=\{-2,\ 0,\ -1\},\ \mathbf{c}=\{2,\ 2,\ 1\}.$
11. $\mathbf{a}=\{1,\ -2,\ 6\},\ \mathbf{b}=\{1,\ 0,\ 1\},\ \mathbf{c}=\{2,\ -6,\ 17\}.$
12. $\mathbf{a}=\{6,\ 3,\ 4\},\ \mathbf{b}=\{-1,\ -2,\ -1\},\ \mathbf{c}=\{2,\ 1,\ 2\}.$
13. $\mathbf{a}=\{7,\ 3,\ 4\},\ \mathbf{b}=\{-1,\ -2,\ -1\},\ \mathbf{c}=\{4,\ 2,\ 4\}.$
14. $\mathbf{a}=\{2,\ 3,\ 2\},\ \mathbf{b}=\{4,\ 7,\ 5\},\ \mathbf{c}=\{2,\ 0,\ -1\}.$
15. $\mathbf{a}=\{5,\ 3,\ 4\},\ \mathbf{b}=\{-1,\ 0,\ -1\},\ \mathbf{c}=\{4,\ 2,\ 4\}.$

Индивидуальное задание №3.

Доказать, что векторы $\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r}$ образуют базис в R^3.

1. $\mathbf{x}=\{-2,\ 4,\ 7\},\ \mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 2\},\ \mathbf{q}=\{1,\ 0,\ 1\},\ \mathbf{r}=\{-1,\ 2,\ 4\}.$
2. $\mathbf{x}=\{6,\ 12,\ -1\},\ \mathbf{p}=\{1,\ 3,\ 0\},\ \mathbf{q}=\{2,\ -1,\ 1\},\ \mathbf{r}=\{0,\ -1,\ 2\}.$
3. $\mathbf{x}=\{1,\ -4,\ 4\},\ \mathbf{p}=\{2,\ 1,\ -1\},\ \mathbf{q}=\{0,\ 3,\ 2\},\ \mathbf{r}=\{1,\ -1,\ 1\}.$
4. $\mathbf{x}=\{-9,\ 5,\ 5\},\ \mathbf{p}=\{4,\ 1,\ 1\},\ \mathbf{q}=\{2,\ 0,\ -3\},\ \mathbf{r}=\{-1,\ 2,\ 1\}.$
5. $\mathbf{x}=\{-5,\ -5,\ 5\},\ \mathbf{p}=\{-2,\ 0,\ 1\},\ \mathbf{q}=\{1,\ 3,\ -1\},\ \mathbf{r}=\{0,\ 4,\ 1\}.$
6. $\mathbf{x}=\{13,\ 2,\ 7\},\ \mathbf{p}=\{5,\ 1,\ 0\},\ \mathbf{q}=\{2,\ -1,\ 3\},\ \mathbf{r}=\{1,\ 0,\ -1\}.$

7. $\mathbf{x}=\{-19,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{3,\ 1,\ 0\}$.
8. $\mathbf{x}=\{3,\ -3,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ -1,\ 4\}$.
9. $\mathbf{x}=\{3,\ 3,\ -1\}$, $\mathbf{p}=\{3,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 0,\ 2\}$.
10. $\mathbf{x}=\{-1,\ 7,\ -4\}$, $\mathbf{p}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ 0,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 1,\ -1\}$.
11. $\mathbf{x}=\{6,\ 5,\ -14\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 1,\ 4\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ -3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 1,\ -1\}$.
12. $\mathbf{x}=\{6,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ 4\}$.
13. $\mathbf{x}=\{5,\ 15,\ 0\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ -1,\ 1\}$.
14. $\mathbf{x}=\{2,\ -1,\ 11\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ 3\}$.
15. $\mathbf{x}=\{11,\ 5,\ -3\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 5,\ -3\}$.

Индивидуальное задание №4.

Заданы два вектора в пространстве. Найти: а) их сумму; б) их разность; косинус угла между ними; в) их векторное произведение.

1.a=(0;1;1), b=(-2;0;1).
2. a=(2;-1;-1), b=(2;2;1).
3. a=(4;3;1), b=(0;0;1).
4. a=(8;0;-1), b=(2;3;-1).
5. a=(2;-1;-1), b=(0;0;-1).
6. a=(0;-1;3), b=(4;0;1).
7. a=(0;-1;-1), b=(5;0;-1).
8. a=(2;-1;-1), b=(2;2;-2).
9. a=(0;-1;-1), b=(-3;0;-1).
10. a=(0;-1;1), b=(-2;0;-1)
11. a=(0;1;0), b=(-2;5;1).
12. a=(0;0;2), b=(-2;3;1).
13. a=(0;2;1), b=(-2;4;-1).
14. a=(0;-1;-1), b=(-2;0;-1).
15. a=(0;-1;1), b=(-2;0;3).

Индивидуальное задание №5.

Решить практический пример, связанный с основной задачей о линейных комбинациях.

1. Имеется два сплава золота и серебра. В первом сплаве эти металлы находятся в отношении 1:4, во втором — в отношении 2:3. Какие количества этих сплавов нужно взять, чтобы сплавив их получить 13 г сплава, в котором золото и серебро будут находиться в отношении 3:10?
2. Имеется два сплава золота и серебра. В первом сплаве эти металлы находятся в отношении 1:2, во втором — в отношении 1:4. Какие количества этих сплавов нужно взять, чтобы сплавив их получить 13 г сплава, в котором золото и серебро будут находиться в отношении 4:9?
3. Имеется два сплава золота и серебра. В первом сплаве эти металлы находятся в отношении 2:3, во втором — в отношении 1:2. Какие количества этих сплавов нужно взять, чтобы сплавив их получить 14 г сплава, в котором золото и серебро будут находиться в отношении 5:9?
4. Имеется два сплава золота и серебра. В первом сплаве эти металлы находятся в отношении 2:3, во втором — в отношении 1:2. Какие количества этих сплавов нужно взять, чтобы сплавив их получить 11 г сплава, в котором золото и серебро будут находиться в отношении 4:7?
5. Имеется два сплава золота и серебра. В первом сплаве эти металлы находятся в отношении 3:4, во втором — в отношении 1:2. Какие количества этих сплавов нужно взять, чтобы сплавив их получить 19 г сплава, в котором золото и серебро будут находиться в отношении 8:11?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется линейным пространством? Приведете примеры.
2. Что называется *n*-мерным вектором?
3. Дайте определение линейных операций над *n*-мерными векторами. Что называется линейной комбинацией векторов?
4. Что называется арифметическим *n*-мерным векторным пространством, евклидовым линейным пространством? Приведите примеры.
5. В каком случае система векторов называется линейно независимой?
6. Что называется базисом векторного пространства?
7. Что называется координатами вектора в данном базисе?
8. Что называется размерностью векторного пространства?